

## Méthodes mathématiques pour la physique (contrôle continu du 07/03/2009)

### Partie I (oscillateur harmonique)

Ici nous allons étudier l'équation de Schroedinger décrivant l'oscillateur harmonique en dimension 3:

$$(\hat{H} - E)\psi = 0,$$
$$\hat{H} = -\Delta + r^2 = -\partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz} + x^2 + y^2 + z^2.$$

1. Montrer que l'hamiltonien  $\hat{H}$  commute avec les opérateurs

$$\hat{H}_x = -\partial_{xx} + x^2, \quad \hat{H}_y = -\partial_{yy} + y^2, \quad \hat{H}_z = -\partial_{zz} + z^2,$$

et que  $[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = [\hat{H}_x, \hat{H}_z] = [\hat{H}_y, \hat{H}_z] = 0$ .

2. En utilisant les résultats connus pour l'oscillateur harmonique en dimension 1, décrire l'ensemble des fonctions propres communes de  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_x$ ,  $\hat{H}_y$ ,  $\hat{H}_z$ , orthonormées par rapport au produit scalaire

$$(\psi, \varphi) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x, y, z)} \varphi(x, y, z) dV,$$

ainsi que les valeurs propres associées. (Question-bonus: calculer les multiplicités des valeurs propres distinctes).

3. Comme le potentiel  $V(r) = r^2$  est invariant par rotations, les opérateurs  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$  et  $\hat{L}_z$  commutent entre eux. Que peut-on dire sur la forme de leurs fonctions propres communes?
4. Dans notre cas, l'équation de Schroedinger radiale s'écrit comme

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + r^2 - E \right) g(r) = 0.$$

Décrire les comportements asymptotiques possibles des solutions de cette équation lorsque  $r \rightarrow +\infty$ .

### Partie II (harmoniques sphériques, fonctions de Legendre)

Montrer les relations:

1.  $\left( \frac{d}{dz} - \frac{mz}{1-z^2} \right) P_\ell^m(z) = -\frac{(\ell+m)(\ell+1-m)}{\sqrt{1-z^2}} P_\ell^{m-1}(z),$

2.  $P_\ell^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(z),$

3.  $\overline{Y_\ell^m(\theta, \varphi)} = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi).$

4. Donner la forme explicite de l'harmonique sphérique  $Y_2^2(\theta, \varphi)$ .